Questão 40

A questão 40 foi **anulada** devido a um erro na redação do enunciado. Na prova, está escrito que Bernardo acredita que o *logaritmo da diferença percentual* (isto é, $\log(\Delta X/X_0)$) é distribuído uniformemente entre $1-\beta$ e $1+\beta$. Porém, a questão é insolúvel nesse caso, já que a probabilidade de uma queda no mercado pior que 10% (situação que implica em um valor negativo de ΔX) é indefinida, pois o logaritmo de um número negativo não é definido.[1]

A intenção dos autores da questão era que a distribuição de Bernardo fosse tal que o *logaritmo da razão* (isto é, $\log(X/X_0)$) fosse distribuído uniformemente entre $1-\beta$ e $1+\beta$. Neste caso, a questão pode ser resolvida. Além disso, a distribuição de Alice deveria ser tal que a *razão* X/X_0 fosse distribuída uniformemente entre $1-\alpha$ e $1+\alpha$ (ou, equivalentemente, que a *diferença relativa* $\Delta X/X_0$ fosse distribuída uniformemente entre $-\alpha$ e $+\alpha$).

Note que, de acordo com a distribuição de Alice dada acima, a probabilidade de uma queda de mais de 10% no índice Dow Jones é dada por

$$p_A = \frac{(1-10\%)-(1-\alpha)}{(1+\alpha)-(1-\alpha)} = \frac{\alpha-10\%}{2\alpha} = \frac{0{,}5\%}{21\%} \approx 2{,}4\%,$$

onde usamos o fato que a distribuição de Alice afirma que X/X_0 é distribuído uniformemente entre $1-\alpha$ e $1+\alpha$ e que $\alpha = 10{,}5\%$.

De acordo com a distribuição de Bernardo corrigida dada acima, a probabilidade de uma queda de mais de 10% no índice suprarreferido é dada por

$$p_B = \frac{\log(1-10\%)-\log(1-\beta)}{\log(1+\beta)-\log(1-\beta)} = \frac{\log 90\% - \log 88\%}{\log 112\% - \log 88\%},$$

onde usamos o fato que a distribuição de Bernardo afirma que $\log(X/X_0)$ é distribuído uniformemente entre $\log(1-\beta)$ e $\log(1+\beta)$ e que $\beta = 12\%$.

O cálculo dos logaritmos na expressão acima pode ser realizado usando as propriedes básicas do logaritmo e os logaritmos dados na prova, como é efetuado abaixo:

$$\log 88\% = \log(2^3 \cdot 10^{-1} \cdot 11) = 3\log 2 - \log 10 + \log 11 = 0{,}9 - 1 + 1{,}04 = -6\%$$
$$\log 90\% = \log(3^2 \cdot 10^{-1}) = 2\log 3 - \log 10 = 0{,}96 - 1 = -4\%$$
$$\log 112\% = \log(2^4 \cdot 7 \cdot 10^{-1}) = 4\log 2 + \log 7 - \log 10 = 1{,}2 + 0{,}85 - 1 = 5\%$$

Substituindo os valores obtidos acima, obtemos

$$p_B = \frac{-4\% - (-6\%)}{5\% - (-6\%)} = \frac{2\%}{11\%} = 18{,}2\%,$$

o valor indicado no gabarito oficial.

[1] Considerando a função logaritmo como uma função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.